УДК 681.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ СИСТЕМЫ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

О.С. Вадутов, С.А. Гайворонский

Предлагается многопараметрический интервальный аналог метода корневого годографа для исследования динамических свойств систем с несколькими интервальными параметрами, линейно входящими в коэффициенты передаточных функций. На основе установленных свойств отображения ребер параметрического многогранника на корневую плоскость разработан алгоритм граничной реберной маршрутизации, позволяющий определять образы границ областей локализации нулей и полюсов системы. Приводится числовой пример.

Введение

Одной из основных задач, решаемых при проектировании линейной системы автоматического управления, является получение требуемого качества переходных процессов, которое определяется полюсами и нулями передаточной функции замкнутой системы. Их желаемое расположение на комплексной плоскости обеспечивается при синтезе системы выбором соответствующих настроек линейного регулятора. Однако в реальных системах физические параметры элементов, как правило, точно неизвестны или могут изменяться по заранее неизвестным законам в определенных диапазонах. В результате отличия фактических значений параметров от номинальных (принятых при синтезе регулятора) будут отличаться от желаемых полюсы и нули системы. Поэтому возникает необходимость оценки влияния интервальной неопределенности параметров на динамические свойства системы.

Возможным путем решения данной задачи может быть построение границ областей локализации полюсов и нулей системы. Эти области являются отображениями на комплексную плоскость корней параметрических многогранников соответственно характеристического полинома и полинома числителя передаточной функции замкнутой системы. Важную роль при отображении играет характер вхождения интервальных параметров в указанные полиномы [1]. Здесь мы ограничимся рассмотрением систем, интервальные физические параметры которых входят в коэффициенты полиномов линейно.

В этом случае для построения границ областей локализации корней полинома может быть использована реберная теорема [2], следуя которой необходимо отобразить на корневую плоскость все ребра параметрического многогранника. Однако рассмотренные примеры применения данной теоремы показывают, что отображение всех ребер является сверхдостаточным (образы только некоторых ребер определяют искомые границы). Поэтому для уменьшения вычислительных трудностей представляет интерес исследование возможности нахождения у многогранника интервальных параметров этих существенных ребер.

1. Постановка задачи

Пусть передаточная функция замкнутой системы по задающему или возмущающему воздействиям имеет вид

$$W(s) = {P(s)}\big/{D(s)},$$

где $P(s)$ и $D(s)$ - полиномы, в коэффициенты которых линейно входят интервальные параметры системы. Решение поставленной задачи рассмотрим на примере построения областей локализации полюсов системы, считая, что для нулей задача решается аналогичным образом. Запишем характеристическое уравнение в следующем виде

$$D(s) = \sum_{i=1}^{m} T_i \cdot A_i(s) + B(s) = 0, \qquad (1)$$

где T_i - интервальные параметры, $\underline{T_i} \le T_i \le \overline{T_i}$, $\underline{T_i} = T_{i\min}$, $\overline{T_i} = T_{i\max}$; $A_i(s)$ и $B(s)$ - полиномы по степеням s.

Так как m параметров заданы своими граничными значениями, то параметрический многогранник, внутри которого T_i могут изменяться произвольным образом, представляет собой прямоугольный гиперпараллелепипед

$$P_T = \{T_i \,|\, \underline{T_i} \le T_i \le \overline{T_i},\, i = \overline{1,m}\},$$

содержащий 2^m вершин. Координаты любой точки P_T относительно вершины V_q, $q = \overline{1,2^m}$ определяются выражениями

$$T_i = T_i^q + \Delta T_i,\ i = \overline{1,m}; \qquad (2)$$

$$(\underline{T_i} - T_i^q) \le \Delta T_i \le (\overline{T_i} - T_i^q), \qquad (3)$$

где ΔT_i - приращение i-го интервального параметра, T_i^q - его значение в вершине V_q.

Ставится задача: на основе анализа отображения ребер на плоскость корней опреде-лить прообразы границ областей локализации корней уравнения (1) при любых значениях T_i, $i = \overline{1,m}$ из области P_T.

2. Свойства отображения ребер

Для отображения φ: $P_T \to S$, где S - множество корней (1), необходимо иметь соотношение, свя-

зывающее координаты точек P_T с n корнями характеристического уравнения. Такое соотношение может быть получено в результате подстановки в (1) выражения (2)

$$D^q(s) + \Delta T_1 \cdot A_1(s) + \\ + \Delta T_2 \cdot A_2(s) + ... + \Delta T_m \cdot A_m(s) = 0, \qquad (4)$$

где $D^q(s) = \sum_{i=1}^{m} T_i^q \cdot A_i(s) + B(s)$ - вершинный характеристический полином.

Введем в рассмотрение ребра P_T, которые обозначим R_i^q, где i - индекс ΔT_i, $i = \overline{1,m}$, q - индекс V_q, из которой по ребру изменяется T_i. На основании (4) запишем уравнение отображения R_i^q на комплексную плоскость корней

$$D^q(s) + \Delta T_i \cdot A_i(s) = 0\,. \qquad (5)$$

Пусть (5) является характеристическим уравнением системы с единичной обратной связью. Тогда передаточная функция системы в разомкнутом состоянии может иметь вид

$$W_i^q(\Delta T_i, s) = \frac{\Delta T_i \cdot A_i(s)}{D^q(s)}\,. \qquad (6)$$

Анализируя (5) и (6) с позиции теории корневого годографа [3], заметим, что при изменении ΔT_i в интервале (3) корни (5), стремясь от полюсов функции (6) к ее нулям, образуют однопараметрический интервальный корневой годограф. Его ветви назовем реберными ветвями (обозначим RS_i^q), а их начала и концы - корневыми узлами U_q. Тогда для отображения φ: $P_T \to S$ будут справедливы выражения: $\varphi(R_i^q) = RS_i^q$, $\varphi(V_q) = U_q$.

По определению многогранника P_T любая его грань является прямоугольником на плоскости изменения двух интервальных параметров T_i и T_j из одной вершины V_q. В соответствии с этим обозначим грань G_{ij}^q, а ее образ - GS_{ij}^q. На основании (1) запишем уравнение отображения плоскости G_{ij}^q при снятии ограничений (2), (3):

$$T_i \cdot A_i(s) + T_J \cdot A_J(s) + \\ + \sum_k T_k^q \cdot A_k(s) + B(s) = 0. \qquad (7)$$

Пусть один из корней уравнения (7) имеет вид $s_r = \alpha + j\beta$, $r \in \overline{1,n}$. Подставляя в (7) координаты s_r и выделяя вещественную и мнимую части, получаем систему двух линейных уравнений с двумя переменными T_i и T_j:

$$\begin{cases} T_i \cdot \operatorname{Re} A_i(\alpha,\beta) + T_j \cdot \operatorname{Re} A_J(\alpha,\beta) + \\ + \operatorname{Re}\left[\sum_k T_k^q \cdot A_k(\alpha,\beta) + B(\alpha,\beta)\right] = 0; \\ T_i \cdot \operatorname{Im} A_i(\alpha,\beta) + T_j \cdot \operatorname{Im} A_J(\alpha,\beta) + \\ + \operatorname{Im}\left[\sum_k T_k^q \cdot A_k(\alpha,\beta) + B(\alpha,\beta)\right] = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Для уравнений системы (8) характерны следующие два случая.

1. Уравнения независимы, и система имеет единственное решение $T_i = T_i^*$, $T_j = T_j^*$. Следовательно, $\varphi^{-1}(s_r) = P^*$, $P^* = (T_i^*, T_j^*)$, причем точка P^* принадлежит плоскости G_{ij}^q.

2. Уравнения отличаются постоянным множителем. Из этого следует, что в плоскости G_{ij}^q существует прямая t, описываемая любым из уравнений системы (8), причем $\varphi^{-1}(s_r) = t$.

Учитывая эти особенности отображения корня s_r на плоскость интервальных параметров, рассмотрим границы области S_r его локализации при условии

$$\varphi^{-1}(S_r) = G_{ij}^q\,. \qquad (9)$$

Пусть $\varphi^{-1}(s_r) = P^*$, причем $P^* \in R_i^q$. Так как координаты P^* являются единственным решением (8), то RS_i^q - единственная ветвь, проходящая через s_r. Следовательно, при условии (9) границами s_r являются непересекающиеся образы ребер G_{ij}^q.

Пусть $\varphi^{-1}(s_r) = t$ и $t \cap G_{ij}^q = \overline{P_1 P_2}$ (точки P_1 и P_2 принадлежат ребрам G_{ij}^q). Следовательно, $\varphi(\overline{P_1 P_2}) = s_r$ и через s_r (назовем его особым корневым узлом и обозначим U^*) проходит множество ветвей корневых годографов по интервальным параметрам, образующим пересекаемые прямой t ребра. Угол входа каждой такой ветви в U^* равен углу выхода, и поэтому все пересекающиеся в U^* ветви лежат между двумя пересекающимися там же реберными ветвями. Следовательно, в этом случае при условии (9) в состав границы S_r входят пересекающиеся образы двух ребер G_{ij}^q.

Назовем ребра, отображающиеся на границы корневых областей, граничными ребрами (обозначим GR_i^q), их образы - граничными реберными ветвями (GRS_i^q), а связываемые ими корневые узлы - граничными корневыми узлами (GU_q).

Покажем, что у P_T существует единственный набор GR_i^q для всех областей локализации комплексных корней. Пусть $\varphi(V_q) = s_1$, $s_1 = \alpha_1 + j\beta_1$, и $\varphi(V_q) = s_2$, $s_2 = \alpha_2 + j\beta_2$, причем s_1 является граничным для S_1 при $\varphi^{-1}(S_1) = P_T$, а s_2 - внутренним для S_2 при $\varphi^{-1}(S_2) = P_T$. Допустим, что один из интервальных параметров T_i при изменении из V_q выходит за

свою границу, определяемую условиями (2) и (3). В результате может оказаться, что $s_1 \notin S_1$, а $s_2 \in S_2$. В этом случае $\varphi^{-1}(s_1) \notin P_T$, а $\varphi^{-1}(s_2) \in P_T$, что противоречит существованию у s_1 и s_2 одного прообраза. Поэтому, если хоть одно отображение V_q является GU_q, то такими же являются и все другие ее отображения. Из этого можно сделать вывод, что при отображении φ: $P_T \to S$ у P_T существует единственный набор GR_i^q, составляющий граничный реберный маршрут.

3. Условие наличия особых корневых узлов

На основе проведенного анализа можно заключить, что реберные ветви могут входить в состав границы как полностью, так и частично, причем последнее является результатом их пересечения в U^*. Данный случай необходимо учитывать при граничной маршрутизации P_T, в связи с чем представляется целесообразным заранее знать о возможности наличия U^* в области S_r.

Очевидно, что необходимым условием $U^* \in S_r$ является присутствие прямых t в плоскостях P_T. Заметим, что если в двухмерном пространстве какой-либо грани существует прямая t, то и в плоскости любого сечения P_T, параллельного рассматриваемой грани, также будет соответствующая прямая t. Поэтому необходимым условием $U^* \in S_r$ является наличие прямой t хотя бы в одной из плоскостей P_T, имеющих одну общую вершину.

Как было указано ранее, условием существования прямой t в пространстве параметров T_i и T_j и ее отображения в $U^*(\alpha; j\beta)$ является линейная зависимость уравнений (8). Эта зависимость имеет место, если существуют такие α и β, что выполняются равенства

$$\frac{\operatorname{Re} A_i(\alpha,\beta)}{\operatorname{Im} A_i(\alpha,\beta)} = \frac{\operatorname{Re} A_J(\alpha,\beta)}{\operatorname{Im} A_J(\alpha,\beta)} = \frac{\operatorname{Re}\left[\sum_k T_k^q \cdot A_k(\alpha,\beta) + B(\alpha,\beta)\right]}{\operatorname{Im}\left[\sum_k T_k^q \cdot A_k(\alpha,\beta) + B(\alpha,\beta)\right]}. \qquad (10)$$

Для этой проверки необходимо решить полученную из (10) систему двух нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re} A_i(\alpha,\beta)\cdot \operatorname{Im} A_j(\alpha,\beta) - \\ -\operatorname{Re} A_j(\alpha,\beta)\cdot \operatorname{Im} A_i(\alpha,\beta) = 0; \\ \operatorname{Re} A_j(\alpha,\beta)\times \\ \times \operatorname{Im}\left[\sum_k T_k^q \cdot A_k(\alpha,\beta) + B(\alpha,\beta)\right] - \\ -\operatorname{Im} A_j(\alpha,\beta)\times \\ \times \operatorname{Re}\left[\sum_k T_k^q \cdot A_k(\alpha,\beta) + B(\alpha,\beta)\right] = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Левые части каждого из уравнений системы (11) являются полиномами нечетной степени β без свободного члена. Поэтому, если (11) не имеет решения с $\beta \neq 0$, то в отображениях рассматриваемой грани и параллельных ей сечений P_T нет U^*. Отсутствие решений (11) для всех сочетаний интервальных параметров означает, что границы S_r состоят из непересекающихся реберных ветвей.

4. Основные фазовые соотношения

Определим условия принадлежности U_q границе S_r. Для этого введем в рассмотрение угол выхода R_i^q из комплексного U_q, являющегося полюсом функции (6). Обозначим этот угол Θ_i^q. Так как на функцию (6) распространяются все известные свойства корневых годографов, то Θ_i^q можно найти из уравнения фаз [3], записанного для U_q. Если $D^q(s)$ имеет степень n, а $A_i(s)$ степень z, тогда Θ_i^q при увеличении T_i находится по формуле

$$\Theta_i^q = 180^\circ - \sum_{k=1}^{n}\Theta_k + \sum_{l=1}^{z}\Theta_l ,$$

а при уменьшении T_i

$$\Theta_i^q = -\sum_{k=1}^{n}\Theta_k + \sum_{l=1}^{z}\Theta_l ,$$

где Θ_k и Θ_l - углы между вещественной осью и векторами, направленными из U_q соответственно к k-му полюсу и к l-му нулю функции (6).

Проанализируем возможные направления движения s_r из U_q, рассматривая области отображения граней P_T с общей вершиной V_q. В каждой из них направление движения s_r определяется вектором $\overrightarrow{E}_{ij} = \overrightarrow{E}_i + \overrightarrow{E}_j$, где $\overrightarrow{E}_i$ и $\overrightarrow{E}_j$ - реберные векторы, задаваемые Θ_i^q и Θ_j^q [4]. Согласно правилам векторной алгебры, $\overrightarrow{E}_{ij}$ выходит из U_q и лежит внутри образованного $\overrightarrow{E}_i$ и $\overrightarrow{E}_j$ угла Ψ_{ij}, причем $0° \le \Psi_{ij} \le 180°$.

Так как из GU_q выходят две граничные реберные ветви, то соответствующие им векторы образуют граничный угол $G\Psi_{ij}$, также лежащий в диапазоне [0…180°]. В этом случае все остальные углы Ψ_{ij}, и, следовательно, определяющие их реберные векторы должны принадлежать $G\Psi_{ij}$. Выразим данное условие через углы выхода реберных ветвей, отсчитываемые от положительной вещественной полуоси. Оно соответствует выполнению C_m^2 неравенств

$$\left|\Theta_i^q - \Theta_j^q\right| < 180^\circ . \qquad (12)$$

Таким образом, на основании проверки (12) можно установить принадлежность вершины P_T границе области S_r.

Проанализируем возможные соотношения углов выхода двух реберных ветвей (RS_i и RS_j) из соседних граничных корневых узлов S_r, связанных одной граничной реберной ветвью GRS_k. Очевидно, что прообразы RS_i и RS_j являются ребрами одной грани P_T.

Пусть $U^* \notin S_r$. При изменении T_k по ребру GR_k корень s_r движется по GRS_k. При этом могут изме-

няться углы выхода из s_r ветвей RS_i^s и RS_j^s. Однако, так как $U^* \notin S_r$, то RS_i^s и RS_j^s не пересекаются. Поэтому при переходе s_r от одного GU_q к другому будет сохраняться последовательность величин Θ_i^s и Θ_j^s. Обобщая этот случай на большее число рассматриваемых реберных ветвей, можно заключить, что в соседних граничных корневых узлах значения их углов выхода будут располагаться в одинаковой последовательности.

Пусть $U^* \in S_r$, тогда RS_i^s и RS_j^s могут пересекаться в U^*. Если при изменении T_k возникнет ситуация $s_r = U^*$, и далее U^* выйдет из S_r, то на оставшемся участке GRS_k изменится соотношение Θ_i^s и Θ_j^s. В этом случае в соседних граничных корневых узлах не будет сохраняться последовательность углов выхода реберных ветвей.

5. Определение граничного реберного маршрута

На основе установленных фазовых соотношений для граничных реберных ветвей и анализа возможности их пересечения в особых корневых узлах разработаем алгоритм граничной реберной маршрутизации P_T. Пусть системы (11) не имеют решений ни для одной из граней P_T с выбранной общей вершиной ($U^* \notin S_r$). Тогда, если известен GU_q и выходящая из него GRS_i^q, то очередной граничной реберной ветвью будет та, модуль разности между углом выхода которой и углом выхода известной GRS_i^q будет наименьшим (наибольшим). Поэтому, зная величины углов Θ_i^q, $i = \overline{1,m}$ для любого граничного корневого узла и расположив их в порядке возрастания (убывания), можно определить последовательность ветвей RS_i^q, $q = \overline{1,2m}$, $i = \overline{1,m}$, ограничивающих область локализации комплексного корня.

Этой последовательности соответствует упорядоченный набор ребер P_T - замкнутый граничный реберный маршрут. Логично заключить, что он состоит из $2m$ ребер, связывающих m пар вершин P_T, причем координаты каждой пары имеют противоположные граничные значения интервальных параметров.

Если хотя бы для одной пары интервальных параметров система (11) имеет решение, то в области S_r возможно наличие U^*. В этом случае необходимо также найти узел GU_q, затем для него определить последовательность Θ_i^q и соответствующую ей последовательность ребер P_m. Если при движении по полученному таким образом реберному маршруту очередное ребро и следующее за ним окажутся образованными интервальными параметрами T_i и T_j, для которых система (11) имеет решение, то в граничный реберный маршрут в этом случае следует включить все ребра грани G_{ij}.

Таким образом, алгоритм определения границ областей локализации корней полинома с интервальными параметрами предусматривает выполнение следующих этапов:

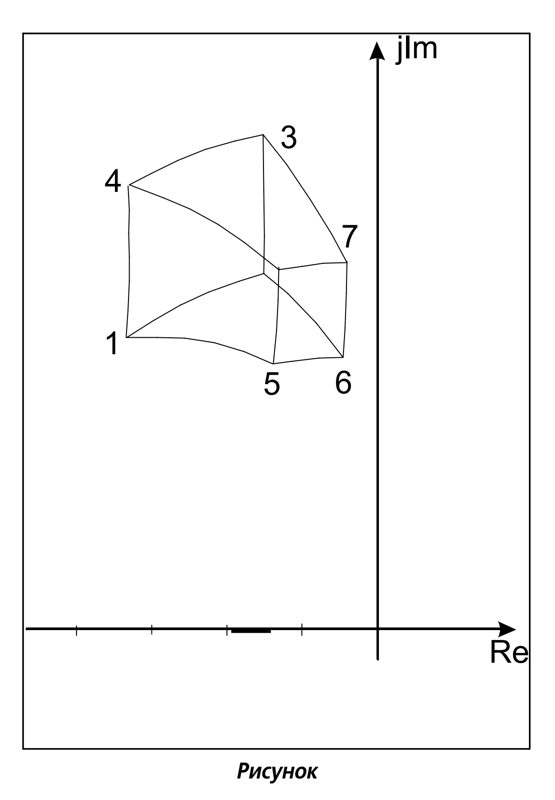
1. Приведение характеристического полинома системы к виду (1).
2. Определение координат вершин P_T, соответствующих граничным значениям интервальных параметров.
3. Решение систем уравнений (11) в одной из вершин P_T для установления интервальных параметров, граничные реберные ветви которых могут пересекаться.
4. Нахождение на основании (12) граничного комплексного узла области локализации корней.
5. Граничная реберная маршрутизация P_T по углам выхода реберных ветвей из граничного корневого узла с учетом результатов п. 3.
6. Отображение на плоскость корней граничного реберного маршрута P_T.

6. Пример

Для системы автоматической стабилизации силы натяжения подъемного механизма определим (см. рисунок) границы областей локализации корней характеристического полинома

$$a_3^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0,$$

где $a_3 = mlJ$, $a_2 = J\chi + m\chi r^2(1 + Tk_1k_2)$, $a_1 = Jc + mcr^2 + mk_1k_2r^2(\chi + Tc)$, $a_0 = mck_1k_2^2$, m - масса груза, l - длина упругого элемента, J - момент инерции электропривода системы, χ - удельный коэффициент демпфирования упругого элемента, c - удельная жесткость упругого элемента, r - радиус приводного шкива электропривода, k_1k_2 - соответственно коэффициент усиления электрической части привода и коэффициент передачи регулятора, T - постоянная времени регулятора.



Рисунок

Постоянные параметры объекта управления имеют значения: J = 0,5 кгм^2, χ = $1\cdot10^4$ нс, $c = 2\cdot10^4$ н, r = 0,1 м. Его интервальные параметры заданы диапазонами: $m \in [50,500]$ кг, $l \in [50,100]$ м, $k_1 \in [5,10]$. Настройки регулятора $k_2 = 1$, $T = 0{,}01$ с определены для средних (номинальных) значений интервальных параметров.

Приведем характеристический полином системы к виду (1):

$$l \cdot A_1(s) + \frac{1}{m} \cdot A_2(s) + k_1 \cdot A_3(s) + A_4(s) = 0,$$

где $A_1(s) = Js^3$; $A_2(s) = J(c + \chi s)s$;
$A_3(s) = ck_2r^2 + (ck_2Tr^2 + \chi k_2r^2)s + \chi Tk_2r^2s^2$;
$A_4(s) = (c + \chi s)r^2s$.

При трех интервальных параметрах P_3 содержит 8 вершин: $V_1(50,50,5)$, $V_2(500,50,5)$, $V_3(500,50,10)$, $V_4(50,50,10)$, $V_5(50,100,5)$, $V_6(500,100,5)$, $V_7(500,100,10)$, $V_8(50,100,10)$, где первая координата - m, вторая - l, третья - k_1. В результате решения для первой вершины систем (11) установлено, что области локализации корней не содержат особых корневых узлов.

Для трех функций вида (6) в первой вершине определены постоянные полюсы (3,34+j3,88, -3,34-j3,88, -1,53), а также три набора нулей (три нулевых корня $A_1(s)$; корни $A_2(s)$: 0 и -2; корни $A_3(s)$: -2 и -100). Для корневого узла 3,34+j3,88 найдены $\Theta_m^1 = 34°$, $\Theta_l^1 = 5°$, $\Theta_{k1}^1 = 86°$. При таких углах условие (12) выполняется и, следовательно, V_1 принадлежит реберному маршруту. Так как, $\Theta_l^1 < \Theta_m^1 < \Theta_{k1}^1$, то имеем последовательность изменения параметров системы из вершины V_1: $l \to m \to k_1 \to l \to m \to k_1 \to l$. Такая очередность соответствует граничному реберному маршруту: $V_1 \to V_5 \to V_6 \to V_7 \to V_3 \to V_4 \to V_1$. Отображение маршрута на верхнюю полуплоскость корней представлено на рисунке, где построены и все остальные несущественные реберные ветви P_3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. - 1991. - № 1. - С. 3-23.
2. Bartlett A.C., Hollot C.V., Lin H. Root location of an entire polytope polynomials: it suffices to check the edges // Proc. Amer. Contr. Conf. - Minneapolis: MN, 1987.
3. Удерман Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. - М.: Наука, 1972. - 448 с.
4. Римский Г.В. Основы общей теории корневых траекторий систем автоматического управления. - Минск: Наука и техника, 1972. - 328 с.

УДК 004.38